

構造物の非線形性に関する基礎的研究

A Basic Study on Non-Linear of the Structures

本研究は、土木構造物の耐震問題として、橋梁のモデルを対象に非線形動的解析を行う事によって構造の振動減衰効果や材料の非線形効果により耐震特性を検討する。

研究の構成は、理論編としてエネルギー原理から定式化し非線形応答解析へと導いている。

又、鉄筋コンクリート断面内の応力の定式化としては、どのようなひずみ分布にも対応できるように断面の曲率と断面の図心位置のひずみで表す方法として曲げモーメント-曲率関係の解析として提案している。それらの理論により連続橋をモデルケースとして、非線形解析の計算例を示した。

青地 知也 *



松井 義孝 **



1. まえがき

先の阪神・大震災では、いままでの常識をはるかに越える大災害をもたらした。構造物の被害という見地に立ち起因者側としては、かつてない直下型地震力であり、それを助長させる液状化現象ではないか。被害の特徴は、塑性領域における破壊メカニズム現象である。たとえば、鉄筋コンクリート構造物が降伏点を越えてからの大きなひび割れや破壊である。また、鋼橋脚も座屈現象が見られた。

2. 理論

構造物の動的な応答を解析するときによく用いるモデルとして、構造を単純化し有限個に分割した「はり」と見なしてモデル化する離散質点系はり要素モデル（非線形フレーム解析）があげられる。特に非線形を伴う場合、復元力特性などの考慮はひずみエネルギー等から運動方式の定式化が重要である。

①合成マトリックスの作成を全ポテンシャルエネルギー停留の原理によって行う。

②離散復元性を持つ構造系の運動方程式を明らかにして、エネルギー解析に必要なつり合い式をたてる。

非線形応答解析では、つり合いの増分方程式として①、②で求めた運動方程式を数値積分するための逐次積分法を Newmark の β 法や Wilson の θ 法などを用いて解析する。

また、材料非線形については、複合材料である RC 部材を用いてその考え方を説明する。

2.2 全ポテンシャルエネルギー停留の原理による剛性方程式の定式化

全ポテンシャルエネルギー停留の原理を利用して、弾性はり要素の剛性方程式を定式化することを行う。

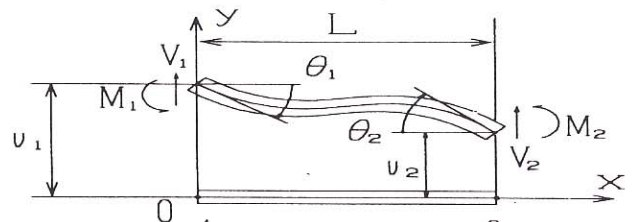


図 2.2.1 はり要素の節点変位と節点外力

図 2.2.1 の弾性はり要素の全ポテンシャルエネルギーは次式で与えられる。

$$\pi = U + W \quad \dots(2.2.1)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx$$

$$W = - \int_0^L q(x)v(x)dx - (V_1 v_1 + M_1 \theta_1 + V_2 v_2 + M_2 \theta_2)$$

ここで U は、はり要素の変形によって内部に蓄えられる弾性エネルギー、 W ははり要素に作用する外力のポテンシャルエネルギーである。

式(2.2.1)の第1変分（1自由度系（ x ）で考えたときの全ポテンシャルエネルギー π を Taylor 展開し、微小区間での全変分を求めたときの第1項）は次の式のようになる。

*) 道路部 工修 Tomoya AOCHI

***) 企画調査室 室長・技師長（技術士：鋼構造及びコンクリート、RCCM：土質及び基礎、土木学会構造工学委員会橋梁振動モニタリング研究小委員会、委員）Yoshitaka MATSUI

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2 dx\right\} - \delta\left(\int_0^L qv dx\right) \\ &\quad - \delta(V_1v_1 + M_1\theta_1 + V_2v_2 + M_2\theta_2) \dots(2.2.2) \\ &= \int_0^L EIv'' \delta v'' dx - \int_0^L q\delta v dx \\ &\quad - (V_1v_1 + M_1\theta_1 + V_2v_2 + M_2\theta_2) \end{aligned}$$

式(2.2.2)の第1項は次式となる。

$$\begin{aligned} \int_0^L EIv'' \delta v'' dx &= \int_0^L \{B\}^T \{w\} D\delta\{B\}^T \{w\} dx \\ &= \int_0^L \delta\{w\}^T \{B\} D\{B\}^T \{w\} dx \\ &= \delta\{w\}^T \left[\int_0^L \{B\} D\{B\}^T dx\right] \{w\} \\ &= \delta\{w\}^T [K] \{w\} \end{aligned} \dots(2.2.3)$$

ここで [K] は剛性マトリックスと呼ばれる。また D = E I は曲げ剛度である。剛性マトリックスを計算すると、E I が一定の場合、次式のようになる。

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \dots(2.2.4)$$

以上のように、全ポテンシャルエネルギー停留の原理により要素の剛性マトリックスを誘導することができた。

2.3 構造系の運動方程式とエネルギーつり合い式

ある物体に対しての力のつり合い式は、

$$f_I + f_D + f_S = f_E \dots(2.3.1)$$

で表される。ここで、 f_I は慣性力を、 f_D は減衰力を、 f_S は物体が歪むことによって発生する内力を、そして f_E は外力を表している。更に多自由度な変位ベクトル $\{u\}$ を考えると式 (2.3.1) は次のような運動方程式となる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{p\} \dots(2.3.2)$$

ここで、[M] は質量マトリックスを、[C] は減衰マトリックスを、[K] は剛性マトリックスを、 $\{p\}$ は外力ベクトルを表している。ただし、式(2.3.2)は変形などによって材料の特性が変化しない、いわゆる線形振動における系の運動方程式である。一般には減衰や内力は速度や変位に対して線形な関係ではないので、式(2.3.2)は減衰ベクトル $\{R_c\}$ と履歴復元力 (内力) ベクトル $\{R_s\}$ を使って次式のように表される。

$$[M]\{\ddot{u}\} + \{R_c\} + \{R_s\} = \{p\} \dots(2.3.3)$$

このような非線形な復元力を持つ運動方程式を解くために、ある十分短い時間間隔 Δt に対して有効である減衰マトリックス $[C_e]$ と剛性マトリックス $[K_e]$ を仮定して式(2.3.3)を増分形で次式のように表す。

$$[M]\Delta\{\ddot{u}\} + [C_e]\Delta\{\dot{u}\} + [K_e]\Delta\{u\} = \Delta\{p\} \dots(2.3.4)$$

言うまでもなく質量マトリックス [M] も増分形のものを用いてもよく、その場合は時間毎に質量の変化する系の運動方程式となる。

次に、エネルギーのつり合い式を求める。力のつり合い式の各項に道のりを掛けるとエネルギーのつり合い式になるので、式(2.3.4)に $\{\dot{u}\} dt$ を乗じて積分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int \{\dot{u}\}^T [M]\Delta\{\ddot{u}\} dt + \int \{\dot{u}\}^T [C_e]\Delta\{\dot{u}\} dt \\ + \int \{\dot{u}\}^T [K_e]\Delta\{u\} dt = \int \{\dot{u}\}^T \Delta\{p\} dt \end{aligned} \dots(2.3.5)$$

ここで各項は左辺から運動エネルギー、減衰エネルギー、ひずみエネルギー、外力からの入射エネルギーを表している。

2.4 逐次積分法

時間間隔 Δt において生じる力の増分のつり合いを表す方程式は、1自由度系に対する増分形式の運動方程式に等価なマトリックス表示式によって表される。すなわち、時刻 t および $t + \Delta t$ において定義されたつり合い関係式の差をとることにより、増分に関するつり合い式は

$$\Delta f_I(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t) \dots(2.4.1)$$

となる。ここで、 f_I は慣性力ベクトル、 f_D は減衰力ベクトル、 f_S はばねによる内力ベクトル、 p は外力ベクトルである。1自由度系の場合になって、上の方程式における力の増分に関するつりあい方程式は、

$$\Delta f_I(t) = f_I(t + \Delta t) - f_I(t) = m\Delta \dot{v}(t)$$

$$\Delta f_D(t) = f_D(t + \Delta t) - f_D(t) = c\Delta \dot{v}(t)$$

$$\Delta f_S(t) = f_S(t + \Delta t) - f_S(t) = k\Delta v(t)$$

$$\Delta P(t) = p(t + \Delta t) - p(t)$$

...(2.4.2)

と表され、ここで質量 m は時間によって変わらないと仮定している。さらに、式(2.4.2)を式(2.4.1)に代入すれば、次式の増分形式の運動方程式が得られる。

$$m\Delta\ddot{v}(t) + c(t)\Delta\dot{v}(t) + k(t)\Delta v(t) = \Delta p(t) \cdots (2.4.3)$$

この運動連立微分方程式の逐次解法は、これらの方程式を連立代数方程式に変換することによって可能となる。

この運動方程式の考え方から、Newmark β 法では時刻 $t + \Delta t$ での変位と速度をパラメータ β と γ を使い、

$$\Delta\dot{v}(t + \Delta t) = \dot{v}(t) + (1 - \gamma)\ddot{v}(t)\Delta t + \gamma\ddot{v}(t + \Delta t)\Delta t \cdots (2.4.4)$$

$$\Delta v(t + \Delta t) = v(t) + \dot{v}(t)\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{v}(t)\Delta t^2 + \beta\ddot{v}(t + \Delta t)\Delta t^2 \cdots (2.4.5)$$

と表している。

2.5 橋脚断面の曲げモーメント曲率曲線の解析

解析には、図-1のような橋脚モデルを用い材料の非線形性として鉄筋コンクリート断面のモーメント曲率曲線を算出するが、一般に使われている道路橋示方書・同解説V耐震設計編による中立軸の位置を試算によって求めながら計算を行う方法では除荷時に断面外に中立軸が移動してしまうことがあるために解の精度が低くなったり、求められない場合がある。そこで本論文では断面内のひずみの分布を中立軸の位置と曲率で定義せずに、断面図心位置のひずみと曲率で表してモーメント-曲率関係を計算する方法を用いている。

次に鉄筋とコンクリートの応力-ひずみの関係をそれぞれ図-2 (a)、(b)のように仮定し鉄筋は弾塑性硬化型のバイリニアモデルを使用し、塑性時の弾性係数は弾性時の弾性係数の 1/10 とした。コンクリート材料は応力-ひずみ曲線を直線で近似したモデルを使い、圧縮ひずみが 0.02 以上になると残留ひずみが発生し、引っ張りでは原点指向をとり残留ひずみがないものとした。以上のようにして解析した曲げモーメント-曲率曲線を図-3に示すように断面の弾性限界 e 、引張側鉄筋の降伏点 y 、圧縮側降伏点 u 、圧縮側コンクリートが終局ひずみに達する点 t の4点を結んだ直線でモデル化した。また除荷時の履歴特性は引張側鉄筋が降伏に至っていない y 点までは原点指向に、それ以上の経験をした場合は y 点と原点を結ぶ直線の傾きを有するようにモデル化した。

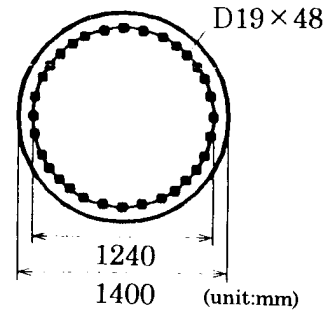


図-1 断面図

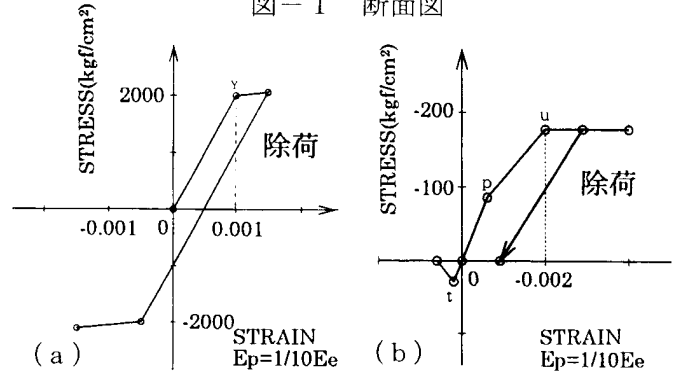


図-2 各応力ひずみ曲線

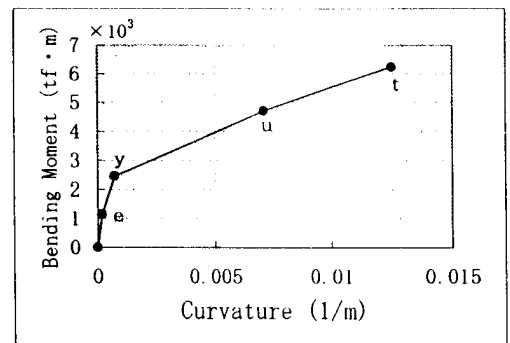


図-3 モーメント-曲率曲線モデル

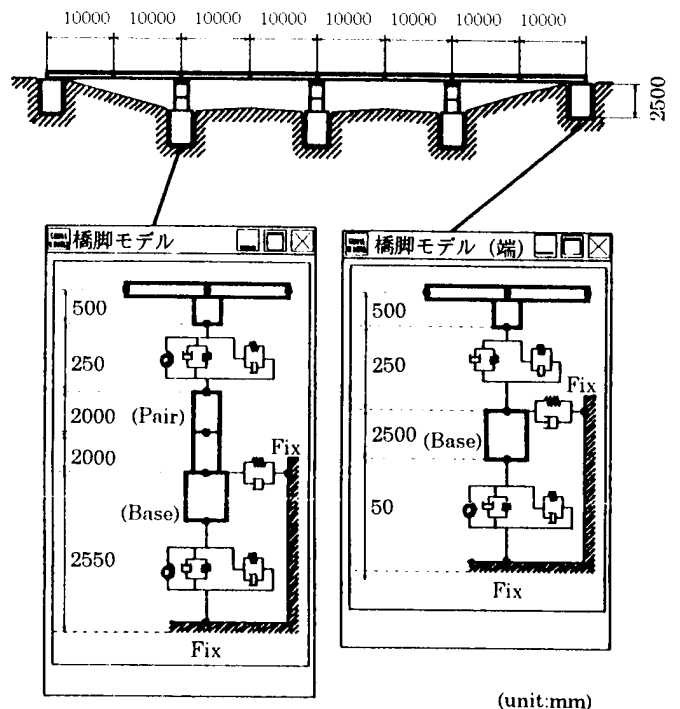


図-4 モデル図

3. 数値計算

解析には、図-1のような橋脚モデルを用いた材料の非線形性として鉄筋コンクリート断面のモーメント曲率曲線を算出する。橋脚断面は直径1400mmの円形で外側にD19の鉄筋が直径1240mmの円周上に48本配置されている。解析にあたってコンクリート部を50分割し、モデル化した。次に免震構造を用いた連続橋を再現するため平面骨組構造によるマトリクス構造解析を行った。Wilsonの θ 法を用い、 $\theta=1.4$ として応答変位、速度及び加速度を求める。

3.1 構造のモデル化

解析に用いたモデルは図-4に示すように連続橋の全体を簡略化し、橋脚、基礎、桁、の3種類の要素を組み合わせモデル化した。このうち橋脚要素のみ非線形要素とし、他の要素は線形とした。各部材の寸法は全長80m、支間長20mの4径間の連続橋とし、橋脚の直径1.4m、高さ4m、支承高さ0.25m、ケーソン基礎の直径2.6m、高さ2mとした。各支承部には免震支承を、各ケーソンと地盤の間には地盤バネを用いた。また減衰定数は免震支承をモード減衰比30%とし、他の要素についてはモード減衰比5%とした。

3.2 入力波形

解析に使用した波形は、周期1Hz振幅200galおよび400galのSin波と阪神大震災時における神戸市で計測された加速度波形の3種類である。各波形とも基礎要素の各節点部分に刺激係数を乗じた力の量で入力した。解析時間は6sec、解析時間間隔は0.001secとした。

4. 解析結果

図-6は阪神大震災における神戸の地震波を入力したときの水平方向変位の時刻歴応答図である。実線が免震支承の上部での変位をあらわし、破線は免震支承の下部での変位をあらわしている。上部の変位は下部の変位に比べ小さくなり、また周期が少し遅れてきていることがわかる。これらは免震支承を用いることによってバネの効果により、ゆっくり振動しているものと考えられる。また、このことから橋梁全体の固有周期が長くなり耐震設計の際に用いられる設計震度を下げる効果がある。

図-7(a)、(b)は周期1Hz振幅400galのSin波を入力したときの水平方向の位相平面である。(a)が免震支承上部の要素、(b)が免震支承下部の要素である。上部の位相平面は一度、負の加速度の方へ大きく膨らむが、しだいにある一定の円軌道を通るように収束してくるが、一方下部の位相

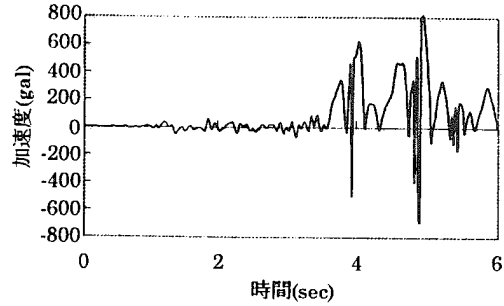


図-5 入力地震動

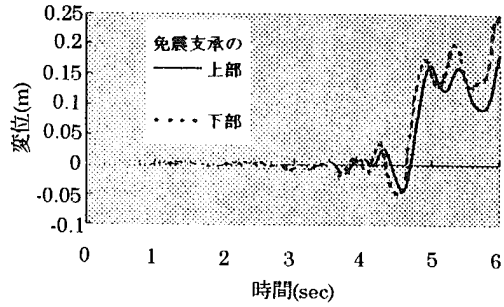
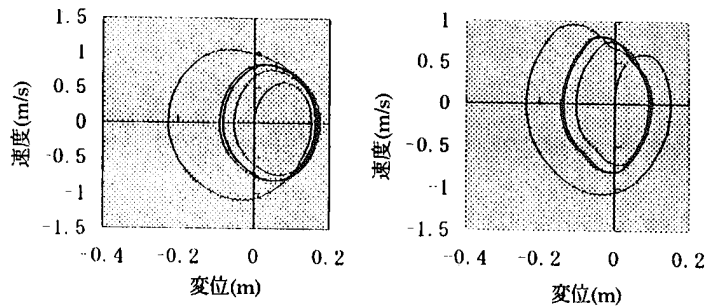


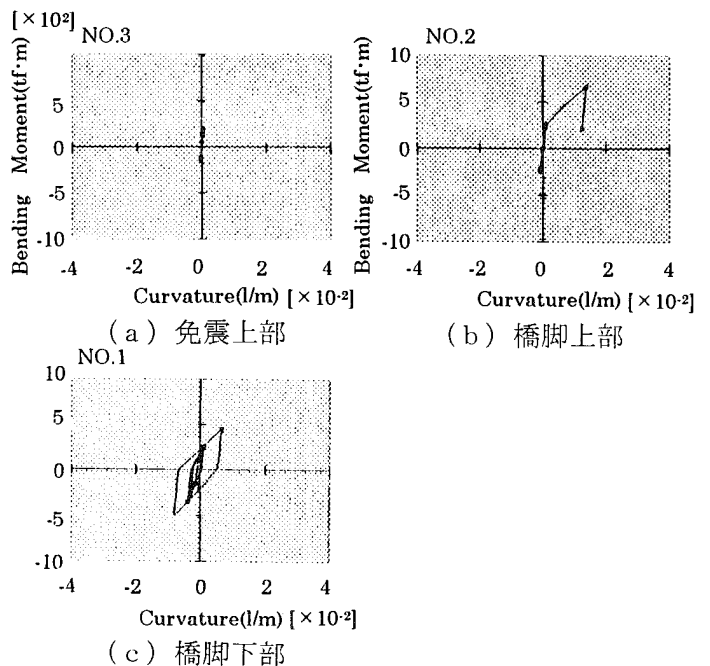
図-6 時刻歴応答変位



(a) 免震上部

(b) 免震下部

図-7 位相平面



(c) 橋脚下部

図-8 モーメント-曲率曲線

平面は円軌道に近づくが、ゆがんだ形になる。これは免震支承の免震効果によって振動が早く線形に近づくことを示している。免震支承を用いることにより下部からの影響を軽減し、耐震性のある構造にすることができている。

図-8 (a)~(c)は周期 1Hz 振幅 200gal の Sin 波を入力したときのモーメント-曲率曲線を示したもので、基礎から左橋脚の 1/2 までの要素を No. 1、左橋脚 1/2 から左橋脚上端部までの要素を No. 2、左免震支承上部から上部工までの要素を No. 3 とした。橋脚根元部に当たる要素 No. 1 は曲げモーメントにより完全に塑性化している。次の要素 No. 2 も塑性化し始めている。

免震支承の上にある要素 No. 3 は部材の結合部であるにも関わらず小さなモーメントを示しており、弾性に近い範囲であることがわかる。せん断力-せん断ひずみ曲線についても同様の傾向が見られる。これらのことは免震支承を用いると、大きく長周期で揺れることによって地震力を軽減しているからと思われる。

次に図-9 は神戸の地震波の加速度スペクトルのグラフを比較したグラフに免震支承のある場合と無い場合の 1 次の固有周期をプロットしたものである。これから解るように免震支承の効果によって構造全体の固有周期が長周期化されたことによって設計震度が下がることを示している。

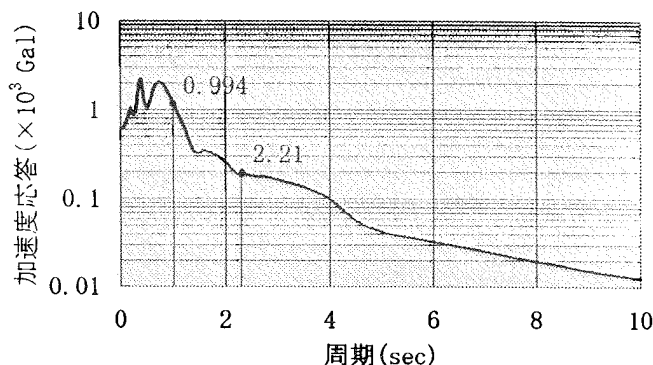


図-9 神戸の地震波における
加速度応答スペクトル

5. まとめ

以下にその結果をまとめる。

- (1) 免震支承を用いることによって固有周期が長周期化し、橋梁がゆっくりと揺れることによって設計震度を下げ、耐震性能を向上させることが確認できた。
- (2) 同様に免震支承を用いることによって橋脚にかかる応力を減少させ塑性化を防ぐ働きがあることが確認できた。

6. あとがき

本研究は、阪神・淡路大震災を契機に免震構造に重みをおき研究を始めた。地震動の影響により動的挙動を知るためにはどうしても塑性域の領域に入り込まざるを得ない。特に上部工では、免震支承による非線形化、橋脚の材料非線形化、そして基礎の非線形化とそれらの特性と変形性状を確実に把握しなくてはならない。筆者らはそれらの基礎的理論として本編に取り組んだ。最近、日々刻々と耐震問題等の研究が急速に進んでいます。今後は、免震ゴム支承の低温時のぜい性や剛性への影響や上下動との連成あるいは、微小であるかも知れないが熱影響等にかかわる連成問題等も研究対象になりうると思われる。

参考文献

- 1) 大島俊之, 三上修一, 小倉祐介, 佐藤昌史: 段落とし部を有する RC 橋脚の強震時非線形挙動と歪みエネルギー、構造工学論文集・1995
- 2) 青地知也, 松井義孝, 大島俊之, 三上修一, 山崎智之: 免震支承を用いた連続橋の振動減衰効果の検討、土木学会北海道支部論文報告集・1996
- 3) 青地知也, 松井義孝, 大島俊之, 三上修一, 山崎智之: 免震支承を用いた振動軽減効果の検討、土木学会第 51 回年次講演概要集・1996
- 4) 大島俊之, 三上修一, 久保和子, 長谷川治, 松井義孝: 免震装置の低温条件における免震シミュレーション、第 1 回免震・制震ユロキウム論文報告集・1996